УДК 681.3.25: 621.382

Ю. Д. Пальченков

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АНАЛОГОВОЙ, ЦИФРОВОЙ И АНАЛОГО-ЦИФРОВОЙ ТЕХНОЛОГИЯМ ОБРАБОТКИ

Предлагается схема классификации и сравнения моделей аналоговых вычислений, структурная схема простой непрерывной машины, использующая динамическую систему и развитие теории $(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$-систем.

Введение

В [1, 2] Поур-Эл представила теорию аналоговых вычислений, которая является одним из направлений теории вычислений, при помощи непрерывных динамических систем [3–6].

Аналоговый компьютер есть параллельно обрабатывающая машина, в которой переменные изменяются непрерывно. Отсюда прямо следует, что теория аналоговых вычислений подходит к нейрокомпьютерам. Параллелизм и аналоговые вычисления, отмеченные выше, являются также характерными чертами нейронных вычислений.

Предложенная в [1, 2] теория аналоговых вычислений, в которой время непрерывно и «программа компьютера» – дифференциальные уравнения и начальные условия, позволяет показать, что машина Тьюринга может вычислять функции, которые аналоговый компьютер не может, и что непрерывная динамическая система может вычислять функции, которые не может машина Тьюринга. Из работ [6–8], следует, что нейросеть есть компьютер, который является также непрерывно-временной динамической системой.

Разработка непрерывно-временной динамической системы, позволяющей создать аналого-цифровой (гибридный) компьютер для управления летательными аппаратами на основе аналоговой вычислимости, является актуальной, т.к. позволяет, с одной стороны, расширить область применения аналоговой обобщенной (универсальной) функции до решения обыкновенных дифференциальных уравнений и, с другой стороны, связать аналоговую обобщенную функцию с тьюринговой вычислимой, и непрерывную функцию аппроксимировать посредством аналогового компьютера (универсальный аппроксиматор). Все эти утверждения связаны с интервалом $[0,\infty)$ и подынтервалом $[0,\tau)$, где $\tau \geq 0$.

Цель статьи заключается в разработке основ теории вычислимых функций действительных переменных (реально значимая функция $y(x)$ – определение аналоговой обобщенной (универсальной) на интервале $[0,\infty)$ и x есть независимая переменная, время), в их применении в проектировании гибридных систем и аналоговых нейронных сетей на основе непрерывно-временной динамической системы, а также в сравнении и классификации математических моделей аналоговых вычислений.

Первый путь исследования ассоциируем с универсальным аналоговым компьютером Шеннона (УАК) [4].

Второй путь исследования связан с представлением аналого-цифровой технологии обработки с помощью динамической системы. Основным моментом второго пути является определение понятия простой непрерывной машины (ПНМ) (стационарная динамическая система) и управляемой непрерывной машины (УНМ) (нестационарная динамическая система) [6, 9, 10].

Единой абстрактной математической моделью для описания трех типов машин (аналоговых, цифровых и аналого-цифровых) является (Z,Q)-машина.

Существенным в определении (Z,Q)-машины является введение понятия *длины памяти*. Интерпретируя память как аналоговую, можно формализовать АВМ для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с постоянными и непрерывными коэффициентами.

Представляя память как цифровую, можно прийти к машине Фон Неймана и их совокупности: машина потока данных и машина клеточных автоматов Тоффоли.

1. Сравнение моделей аналоговых вычислений

Схематичное изображение обрабатывающей компоненты нейросети приведено на рисунке 1.

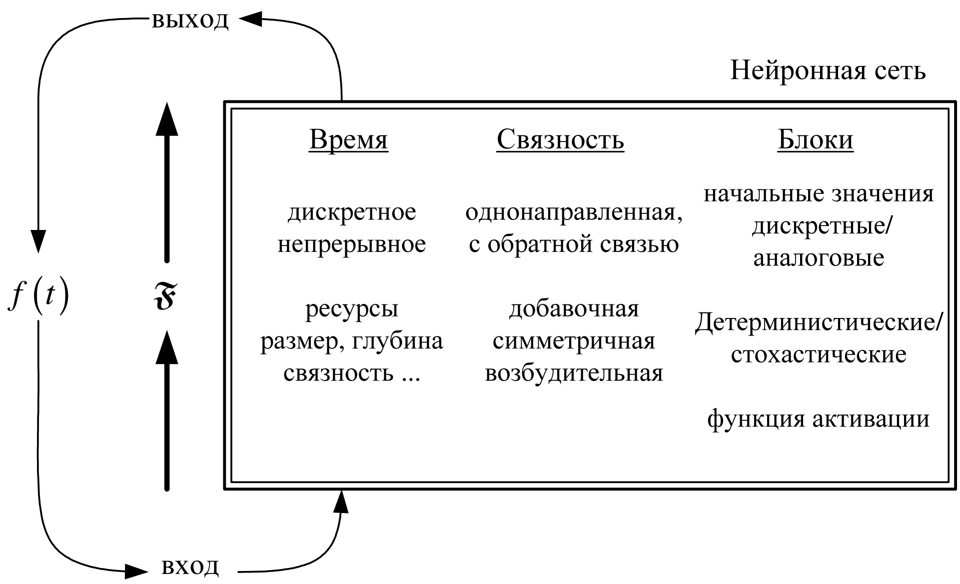

Рис. 1 Обрабатывающая компонента нейросети

Черный ящик обозначает обрабатывающую систему аналого-цифровой нейронной сети. $\mathfrak{F}$ есть функция входа–выхода, вычисляемая посредством одного шага активации нейронной сети. $f(t)$ есть результирующая временная функция, полученная с помощью итерационных шагов активации, в случае нейронной сети с обратной связью.

Таким образом, актуальной проблемой является разработка математических моделей для определения $\mathfrak{F}$ и $f(t)$ в нейросети и методов взаимодействия информационных процессов аналого-цифровой вычислительной машины, которую целесообразно применять для решения задач, включающих: динамические операторы (системы обыкновенных дифференциальных уравнений), статические операторы (алгебраические преобразования, связанные с обработкой входной информации, поступающей как в аналоговой, так и в цифровой форме), операторы нелинейных и тригонометрических преобразований, связанных с преобразованием пространственных координат и вычислением навигационных параметров управляемого объекта.

Цель I раздела статьи заключается в сравнении математических моделей аналоговых вычислений и классификации аналоговых вычислительных машин и функций, которые они генерируют.

Под непрерывной динамической системой обычно подразумевается n-мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида [6–8]

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1}$$

где $f:\mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}^n$ – поле, определяющее систему.

Если поле f достаточно гладкое, тогда система (1) определяет уникальную траекторию, поток динамической системы в $\mathfrak{R}^n$, т.е. такую функцию $\Phi:\mathfrak{R}^{n+1} \to \mathfrak{R}^n$, что для любого $x \in \mathfrak{R}^n$, $\Phi(x,0) = x$, и для всех $\tau \in \mathfrak{R}$

$$\frac{d}{dt}\big(\Phi(x,t)\big)\big|_{t=\tau} = f\big(\Phi(x,\tau)\big).$$

Иначе динамическую систему можно представить таким образом: $y' = K(x, y)$, где K – матрица рациональных функций.

Динамическая система может быть использована для моделирования машины Тьюринга. Лента машины Тьюринга сначала представляется как два противоположных стека и затем содержимое этих двух стеков кодируется каким-либо способом как два реальных числа, что ведет к представлению состояния системы как точки в R^2 (обычно заключенной в интервале $[0,1]^2$).

Машину Тьюринга можно представить, как показано на рисунке 2.

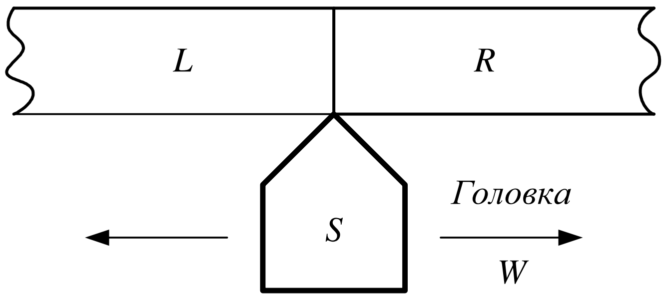

Рис. 2 Представление машины Тьюринга тремя счетчиками L, R и W

Головка машины имеет конечный набор S внутренних состояний:

L – счетчик для представления левой половины ленты;

R – счетчик для представления правой половины ленты;

W – счетчик, работающий на сложение.

Мгновенная конфигурация машины Тьюринга представлена как пара целых чисел (x_L, x_R), кодирующая содержимое ленты.

Целые числа для кодирования дают некоторую устойчивость против небольших возмущений.

Тогда $x_L, x_R \in \Re$ и системные уравнения имеют вид

$$\frac{dx_L}{dt} = -x_L + f_L(x_L, x_R);$$
$$\frac{dx_R}{dt} = -x_R + f_R(x_L, x_R).$$

Переменные состояния x_L и x_R не сохраняют свои «старые» значения, а вновь вычисленные значения сохраняются с помощью переменных состояния $\tilde{x}_L, \tilde{x}_R \in \Re$, временной переменной $\tau \in \Re$ и введением двух периодических функций «часов».

Каждую точку (x, y) в единичном квадрате свяжем (ассоциируем) с бинарными цифрами его координат x и y с правой и левой половинками ленты машины Тьюринга. Если лента – это $...a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, ...$, то $x = 0,\ a_{-1}, a_{-2}, ...$ и $y = 0,\ a_0, a_1, a_2, ...$ Тогда сдвигание головки ленты влево эквивалентно делению наполовину x, удвоению y и перемещению самой значимой цифры a_0 из y в x.

Обзор моделей аналоговых вычислений начинаем с универсального аналогового компьютера (УАК), предложенного Шенноном. Считается, что этот УАК является изящной моделью аналогового вычисления в непрерывном времени [4, 5, 10].

УАК-схема представлена на рисунке 3. УАК вычисляет дифференциально-алгебраические функции (ДА). Функция $f(x)$ является ДА, если ее производная удовлетворяет равенству

$$P\Big(x, f(x), f'(x), ..., f^k(x)\Big) = 0$$

для некоторого многочлена P с рациональными коэффициентами. Не ДА функции называются трансцендентными.

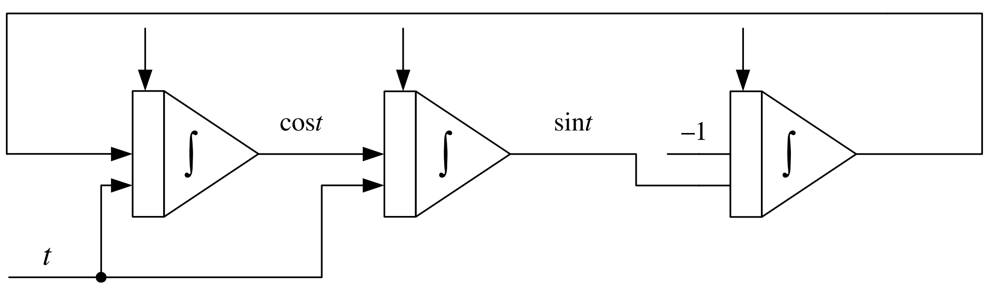

Рис. 3 УАК К. Шеннона, который вычисляет sin *t*

ДА функции в свою очередь называются иррационально алгебраическими (ИА) и рациональными алгебраическими (РЦ). К ИА относятся x^m, где m – рациональная дробь, решения алгебраического уравнения, выраженное через параметр. К РЦ относятся частные от деления многочленов; целые a, x, x^2 и другие многочлены. Трансцендентные функции реализуются расширенным аналоговым компьютером (РАК), предложенным Л. Рубелем [3].

Основным вопросом вычислительной теории является вопрос о том, закрывается ли итерация УАК. Из функции $f(x)$ получается функция $F(x,t) = f^{[t]}(x)$, т.е. f применяется к x t раз для $t \in N$.

С практической точки зрения для УАК не ясен вопрос реализации неравенств и операций дифференцирования. К. Шеннон дал определение УАК вычислимой функции $y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ от m независимых переменных $x = (x_1, ..., x_m)$. В 1974 г. это понятие уточнено M. B. Pour-El [2] и выглядит следующим образом (определение (Шеннон, Поур-Ел)): реально-значимая функция $y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ от m-независимых переменных $x = (x_1, ..., x_m)$ есть УАК-вычислимая на замкнутом подмножестве D из $\mathbb{R}^m$, если там существует реально-значимая функция $y(x) = y_1(x), ..., y_n(x)$ для некоторого n с начальным условием $y(x_0) = y_0$, где $x_0 \in D$.

Векторная функция $y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, для $k > 1$ – УАК-вычислимая, если УАК-вычислимой является каждая из ее компонент. Здесь $y_1, y_2, ..., y_n$ представляют внутренние состояния компьютера, где $y = y_1$ – выходная, а $y_2, ..., y_n$ – дополнительные переменные.

Шеннон, Поур-Эл, Липшиц, Рубель доказали, что УАК-вычислимые функции одной переменной точно совпадают с ДА-функциями. На рисунке 4 представлено разбиение стандартной теории рекурсивных функций на три основные части.

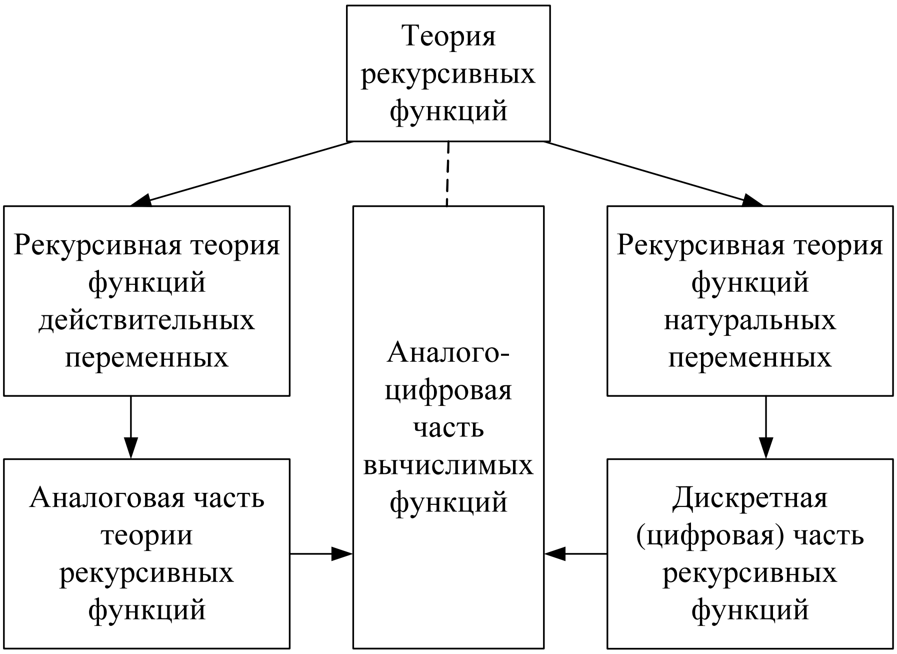

Рис. 4 Разбиение стандартной теории рекурсивных функций на три основные части

На рисунке 5 изображены аналоговые схемы, реализующие дифференциальные уравнения; операции сложения и умножения; неравенства и итерации.

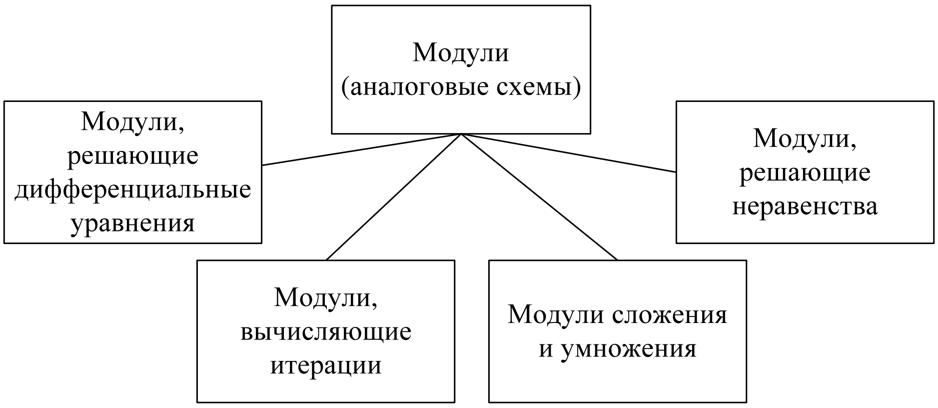

Рис. 5 Модули, реализующие аналоговые схемы

На рисунке 6 изображена УАК-схема для определения интегрирования, предложенная К. Муром [5].

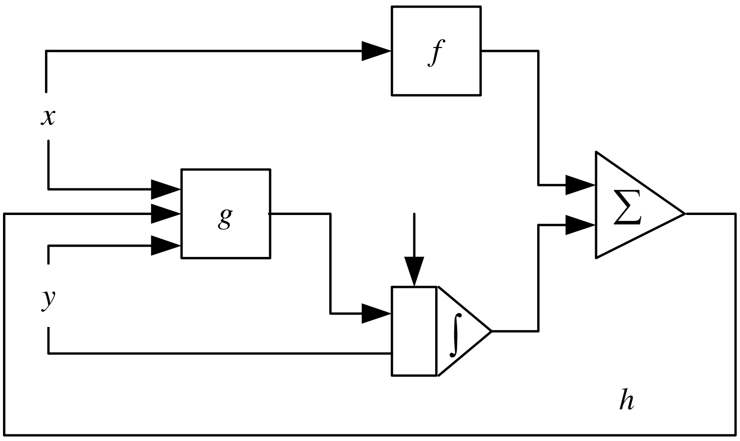

Рис. 6 УАК-схема для определения интегрирования, используемая К. Муром, где $h(x_0) = f(x),\ d_y h(x, y) = g(x, y, h)$

УАК-схему К. Шеннона, УАК-схему К. Мура обобщает простая непрерывная машина (ПНМ) Б. Кониковской, представленная на рисунке 7.

ПНМ Б. Кониковской задается условиями:

1. $(\tau > 0) \wedge (\forall f_0 \in DM)\big(M(f_0)\big|[0;\tau) = f_0\big) \vee$

   $(\tau = 0) \wedge (\forall x \in DM)\big((M(x))(0) = x\big)$;

2. $(\forall f \in RM)(\forall a \geq 0)(f_a \in RM)$.

ПНМ позволяет реализовать операции итерации, неравенства и дифференциальные уравнения.

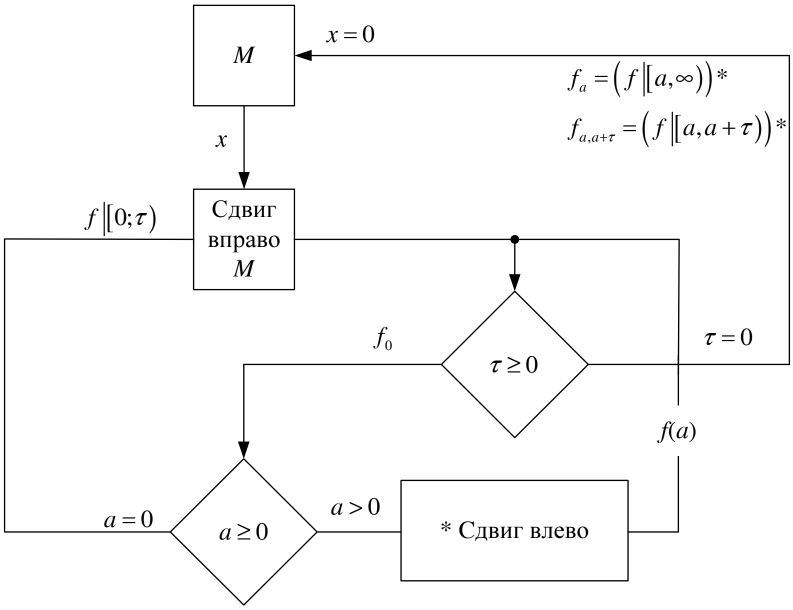

Рис. 7 Структурная схема простой непрерывной машины Б. Кониковской, использующая динамическую систему

Суммарные результаты представлены в виде соотношений между вычислимыми функциями класса N, класса R и класса $N-R$. Соотношения рекурсивных функций изображены на рисунке 8.

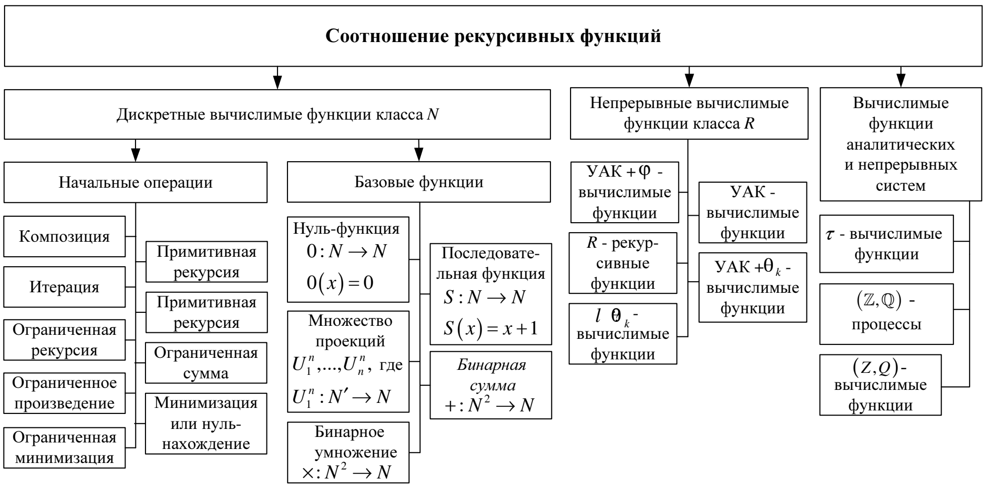

Рис. 8 Определяющие соотношения рекурсивных функций класса N, класса R и класса непрерывных динамических систем

2. Теоретические исследования основ современных технологий обработки аналого-цифровой информации

Повышения скорости обработки информации можно добиться только при совместном исследовании структуры решаемых задач, алгоритмов и архитектуры вычислительных систем.

Наш подход основывается на утверждении А. Н. Колмогорова и В. А. Успенского, предпринявших в 1958 г. попытку расширить понятие алгоритма и пришедших к выводу, что самое общее понятие алгоритма связывается с определением вычислимой функции, аргументами и значениями которой являются натуральные числа. В дальнейших рассуждениях будем использовать τ-ВФ, (Z,Q)-ВФ, $(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$-ВФ, существенным в определении которых является то, что аргументы и значения функций – действительные переменные [1, 2, 5, 9, 11].

Разработка основ современных технологий обработки аналого-цифровой информации на основе (Z,Q)-машины и ее обобщение на многовходовый случай $(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$-системы является актуальной, т.к. позволяет, с одной стороны, расширить использование обрабатывающей компоненты гибридного компьютера в нейросети, учитывая, что она есть алгоритм (или множество обыкновенных дифференциальных уравнений), с другой – связать гибридный процессор с непрерывной динамической системой и тем самым расширить функции, генерируемые гибридным процессором.

Цель второго раздела статьи заключается в теоретическом исследовании основ современных технологий обработки аналого-цифровой информации посредством (Z,Q)-машин и многовходового использования таких машин в нейросетях.

Представим Z_k как начальный отрезок непрерывного времени Q_k на ленте с номером $k=1,2,...,n$.

Если задано значение функции f_k на начальном отрезке Z_k, то можно однозначно определить продолжение этой функции на всем непрерывном отрезке времени Q_k. Напомним, что в математике рекурсией называется способ описания функции или процессов через самих себя.

Однозначное продолжение задает оператор M, и для одной k-й ленты

$$M(f)\,\big|\,Z_k = f.$$

Более точно для n лент начальные отрезки (начальная информация) можно записать:

$$\left.\begin{array}{c} f_1 : Z_1 \to S; \\ f_2 : Z_2 \to S; \\ \cdots \\ f_n : Z_n \to S, \end{array}\right\} \text{начальная информация}$$

где S – произвольное, но в дальнейшем фиксированное, непустое множество.

Всю начальную информацию обозначим как $f=(f_1,...,f_n)$, тогда

$$M(f)\,\big|\,\mathbb{Z}=f$$

для любой $f\in DM$, где M – система, $M(f)$ – процесс и система $M(f)=\left(\overline{f_1},\overline{f_2},...,\overline{f_n}\right)$, $\mathbb{Z}$ – декартово произведение множеств $Z_1,...,Z_n$.

Набор *n* готовых лент:

$$\overline{f_1} : Q_1 \to S;$$
$$\overline{f_2} : Q_2 \to S;$$
$$\ldots$$
$$\overline{f_n} : Q_n \to S;$$

$Q_0 = Q_1 \bigcap Q_2 \bigcap \ldots \bigcap Q_n$ – пересечение множеств; $\mathbb{Q} = Q_1 \times Q_2 \times \ldots \times Q_n$ – декартово произведение, но $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ могут быть разными.

Вычисление системы из *n* лент:

$$\varphi_f(t) = \left(\overline{f_1}(t), \overline{f_2}(t), \ldots, \overline{f_n}(t)\right) \text{ для любых } t \in Q_0.$$

Процесс рассматривается как *n* готовых лент.

Все начальные отрезки $f = (f_1, \ldots, f_n)$ составляют множество DM. Продолжение функций $\overline{f_i}$ на множестве Q_i обозначим RM.

3. Развитие теории $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$-систем

$(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$-системой $M : DM \to RM$ называется такая система, в которой выполняются два условия:

1) однозначное продолжение

$$\forall f \in DM, \ M(f)\Big| = \overline{f};$$

2) если $f \in RM$, то после сдвига $\overline{f}$ влево

$$f_{\text{новая}} = \left(f_1(t_1 + a), f_2(t_2 + a), \ldots, f_n(t_n + a)\right),$$

тогда $f_{\text{новая}} \in RM$, $a \in Q_1, a \in Q_2, \ldots, a \in Q_n \Leftrightarrow a \in Q_0$, здесь Q_0 –общее время для всех лент.

Теоретическое обоснование и определение $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$-систем для исследования в многовходовых вычислительных системах и переход к непрерывным динамическим системам позволит осуществить использование методики проектирования гибридного процессора для проектирования аналоговых нейронных сетей. Разработка обрабатывающей компоненты нейросети является актуальной и позволяет расширить и связать методики проектирования гибридного процессора и нейрокомпьютера.

Цель третьего раздела статьи заключается в разработке теоретического обоснования использования многовходовых $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$-систем для проектирования аналоговых нейросистем и гибридных процессоров.

Определение [4]. Отображение $f \in F_Q$ называется $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$-процессом, если и только если существует $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$-система *M*, такая, что $f \in RM$. Здесь F_Q – множество отображений вида $f : \mathbb{Q} \to S^n$. Если *f* есть $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$-процесс, то верна одна из двух ситуаций:

1) начиная с некоторого момента времени f – периодическая функция (рис. 9,а);

2) если не реализуется первая ситуация, то обязательна вторая ситуация и f будет Z-инъективной (рис. 9,б).

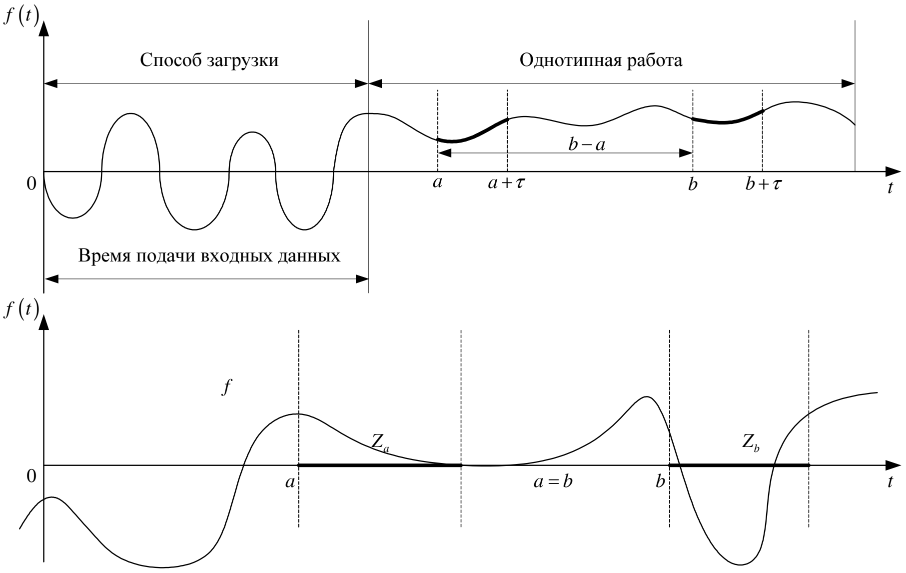

Рис. 9 Представление f как $(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$ - процесса

Итак, $(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$-система – это оператор M, который однозначно продолжает начальные значения на все ленты; (Z,Q)-машина – это $(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$-система в случае одной ленты; $(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$-процесс – результат применения $(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$-системы для получения n готовых лент; $(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$-вычисление, результат работы $(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$-системы, рассматриваемый в каждый (один) момент времени для всех n лент одновременно; $(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$-вычисление совпадает с $(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$-процессом для (Z,Q)-машины (т.к. лента одна).

Для (Z,Q)-машины лента будет одна. Тогда для аналоговой технологии обработки временная ось может быть представлена как произвольное множество точек Q, равное R^+ или N_0, где R^+ – множество положительных реальных чисел; N_0 – множество целых неотрицательных чисел; Z – произвольное множество Q, т.е. $Z \subseteq Q$.

С учетом сказанного на данной модели можно исследовать несколько типов машин. Так, если:

$Z=\{0\}$ и $Q=N_0$, то $M_1=(\{0\},N_0)$;

$Z=\{0,1,2,...,k-1\}$ и $Q=N_0$, то $M_2=(\{0,1,2,...,k-1\},N_0)$;

$Z=\{0\}$ и $Q=R^+$, то $M_3=(\{0\},R^+)$;

$$Z = [0, \tau) \text{ и } Q = R^+, \text{ то } M_4 = \left([0, \tau), R^+\right).$$

Первые два класса машин M_1, M_2 являются дискретными, а M_3, M_4 – аналоговыми. M_1 описывает тип классических цифровых машин Фон Неймана (МФН) с одним счетчиком команд l и регистром команд r. M_2 – совокупность МФН с множеством счетчиков команд $l_1, ..., l_n$ и множеством регистров команд $r_1, ..., r_2$.

M_3, M_4 служат для представления аналоговых машин для решения линейных ОДУ с постоянными и переменными коэффициентами.

Заключение

Основным результатом статьи является теоретическое обоснование аналоговой, цифровой и аналого-цифровой технологии обработки и разработка математических моделей гибридных процессоров и обрабатывающей компоненты нейросети.

Научная новизна статьи состоит в следующем:

– разработана и исследована структурная схема и алгоритм работы простой непрерывной машины на основе непрерывно-временной динамической системы, позволяющие обобщить УАК Шеннона и УАК Мура.

– разработана теория многовходовых $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$-систем для проектирования гибридного процессора и обрабатывающей компоненты нейросети. С вычислительной точки зрения обрабатывающая компонента нейросети есть множество обыкновенных дифференциальных уравнений и начальных условий, которые представляют программу работы нейрокомпьютера.

Предлагаемый подход позволяет расширить классы решаемых задач, что подтверждается приведенными в статье примерами моделирования машины Тьюринга, соотношениями между вычислительными функциями класса *N*, класса *R* и класса *N–R*, а также преобразованием $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$-системы при определенной интерпретации в машину Неймана и аналоговые машины.

Список литературы

1. **Pour-El, M. B.** The Mathematical Theory of the Analog Computer. In Mathematical Perspectives on Neural Networks / M. B. Pour-El ; edited by P. Smolensky, M. C. Mozer, D. E. Rumelhart. – 1996. – P. 225–241.
2. **Pour-El, M. B.** Abstract computability and its relations to the general purpose analog computer / M. B. Pour-El // Trans. Am. Math. Soc. – 1974. – № 199. – P. 1–28.
3. **Rubel, L. A.** The extended analog computer. Advances in Applied Mathematics / L. A. Rubel. – 1993. – № 14. – P. 39–50.
4. **Шеннон, К.** Математическая теория дифференциального анализатора / К. Шеннон // Работы по теории информации и кибернетике / пер. с англ. – М. : Мир, 1963. – С. 709–728.
5. **Moore, C.** Recursion Theory on the Reals and Continuous – time computation / C. Moore // Theoret. Comput. Sci. – 1996. – № 162. – P. 24–44.
6. **Hirsch, M. W.** Dynamiacl Systems In Mathematical Perspectives on Neural Networks / M. W. Hirsch ; edited by P. Smolensky, M. C. Mozer, D. E. Rumelhart. – 1996. – P. 275–320.
7. **Mycka Jerzy.** The computational power of continuous dynamic systems / Mycka Jerzy, Costa Jose Felix. – 2005. – V. 3354. – LNCS. – P. 163–174.

8. **Siegelmann, H. T.** Analog computation with dynamical systems / H. T. Siegelmann, S. Fishman // Physica D. – 1998. – V. 120. – P. 214–235.
9. **Konikowska, B.** Continuous Machines, Information and Control / B. Konikowska. – 1973. – V. 22. – P. 353–372.
10. **Burnez, O.** The General Purpose Analog Computer and Computable Analysis are two equivalent paradigms of analog computation / O. Burnez, M. L. Campagnolo, D. S. Graca, E. Hainry // J. Y. Cai, S. B. Cooper and A. Li, editors, Theory and Applications of Models of Computation TAMC'06, LNCS 3959. – 2006. – P. 631–643. – Springer – Verlag.